数理解析研究所講究録
178巻 1973年 99-108

しきい値復号法による たゝみ込み符号

日電 中研　岩 垂 好 裕

§1　序

たゝみ込み符号（Convolutional codes）はMITのElias[1]によって最初に提案された符号である。今迄に述べられたブロック符号が、各ブロック毎に符号化、復号が独立に行われ、過去のブロックは現在のブロックに無関係であるのに対し、たゝみ込み符号では、小さい情報点数k_0，及びブロック長n_0が用いられる代りに、過去のブロックが現在のブロックに関する出力に影響を与える。その為にブロック符号には現れない現象も生じてくる。

たゝみ込み符号の発展は大別して3つの復号法、しきい値復号法（Threshold decoding）[2]，最尤復号法（Maximum likelihood decoding）[3]，及び逐次復号法（Sequential decoding）[4]に沿って行われて来た。このうちしきい値符号法が最も簡単で実用上の利点が多いと考えられているので、

以下にこの復号法とその問題点について述べる事とする。

§2. しきい値復号法(I)ーたゝみ込み符号の符号化法

しきい値復号法では、受信側で計算したシンドローム系列、又はその線型変換をしきい値素子の入力とし、その出力によって誤訂正を行う機能を持つものである。

議論を進める為に、符号の伝送速度 $R=1/2$ で、2つ迄のランダム誤りを訂正する符号を例にとって説明する。この符号の符号器は、第1図に示す $(1-R)n_A$ 段型といわれるものと、第2図に示す Rn_A 段型といわれるものがある。いずれにしろ情報源から出た情報ビットは、符号器の入力端子から入力され、出力端子の1つからこの情報系列はそのまゝ出力される。他方この情報系列の情報ビットは、符号器内の結線に従って符号器下部のシフトレジスタに入力され、情報ビット相互の線形結合がとられ、このシフトレジスタの内容が第2の出力端子から検査シンボルとして送り出される。このように符号器のシフトレジスタの結線で示される情報ビットの線型結合で構成される検査シンボルの結線が、符号の構成法を示すものとなる。

時刻 u に入力端子から入力される情報シンボルを $i_u^{(1)}$ とし、D を遅延パラメータとすれば、符号器入力情報系列 $I^{(1)}(D)$

は、時間原点を0にとって、

$$I^{(1)}(D)=i_0^{(1)}+i_1^{(1)}D+i_2^{(1)}D^2+\cdots\cdots\cdots \qquad (1)$$

という時系列で表される。同様にして時刻uに於ける符号器の2つの出力を、$t_u^{(1)}, t_u^{(2)}$とすれば、2つの出力系列$T^{(i)}(D)$, $i=1,2$ は

$$T^{(i)}(D)=t_0^{(i)}+t_1^{(i)}D+t_2^{(i)}D^2+\cdots\cdots\cdots \qquad (2)$$

$$i=1,2$$

という時系列で表される。1つの出力系列は入力系列がそのまゝ現れるので、

$$T^{(1)}(D)=I^{(1)}(D) \qquad (3)$$

が成立する。次に検査シンボル$T^{(2)}(D)$についてみる。先ず、図に示すように符号器結線を$g_0, g_1, \cdots, g_6$で表し、結線のあるところで$g_i=1$，そうでないところで$g_i=0$とする。そしてこの結線の仕方を

$$G(D)=g_0+g_1D+g_2D^2+\cdots\cdots\cdots+g_6D^6$$
$$=1+D^2+D^5+D^6 \qquad (4)$$

という多項式で表す。この多項式を生成多項式といい、符号を定めるものとなる。符号器内のシフトレジスタが最初すべて零であるとすれば、$T^{(2)}(D)$は時刻6に於て初めて定常状態に達する。この時刻に於ける$T^{(2)}(D)$の出力$t_6^{(2)}D^6$は、このシフトレジスタの結線により

$$t_6^{(2)} D^6 = (i_6^{(1)} D^6 \cdot D^0 + i_5^{(1)} D^5 \cdot D + i_2^{(1)} D^2 \cdot D^4 + i_0^{(1)} D^0 \cdot D^6) \quad (5)$$

と表されるる。

第1図又は第2図からわかる様に、この符号は長さ2の部分ブロックを構成している。また(5)式からわかる様に、時刻0に於ける情報ビット $i_0^{(1)}$ は、時刻6に於ける検査ビット迄に影響を及ぼすが、それ以後の検査ビットには影響を及ぼさない。すなわち $i_0^{(1)}$ の影響の及ぶ範囲は時刻0の部分ブロックから時刻6の部分ブロック迄の7ブロックで、その間に伝送される伝送ディジットの数は $7 \times 2 = 14$ ビットである。これをたゝみ込み符号の拘束長といい、ブロック符号の符号長に対応するものとなる。

(5)式から、第2の伝送系列 $T^{(2)}(D)$ は、

$$T^{(2)}(D) = G(D) I^{(1)}(D) = t_0^{(2)} + t_1^{(2)} D + t_2^{(2)} D^2 + \cdots\cdots \quad (6)$$

と表され、$T^{(1)}(D)$ と合せて2つの伝送系列が伝送される事になる。伝送路上で雑音が加えられる事もあるが、この雑音の影響は同じように多項式 $E^{(i)}(D)$, $i=1,2$ によって

$$E^{(i)}(D) = e_0^{(i)} + e_1^{(i)} D + \cdots\cdots + e_u^{(i)} D^u + \cdots\cdots \quad (7)$$

と表され、こゝで $e_u^{(i)}$ は、時刻 u に第 i 伝送系列に誤りが生じた時に1、そうでない場合0の値をとる。このような雑音の影響によって受信系列

$$R^{(i)}(D) = r_0^{(i)} + r_1^{(i)} D + r_2^{(i)} D^2 + \cdots\cdots \quad , i=1,2 \quad (8)$$

は、

$$R^{(i)}(D)=T^{(i)}(D)+E^{(i)}(D) \qquad (9)$$

で表される。

§3. しきい値復号法(II)ーその復号法

この符号の復号器は第3図に示されている。先ず情報系列 $R^{(1)}(D)$ は R_{nA} 段型の符号器によって再度符号化が行われ、これによって構成されたパリティ検査系列と受信したパリティ検査系列を加え合せる。このようにして得られる系列をシンドローム系列 $S(D)$ という。時刻 u に於て計算されるシンドロームディジットを S_u とすれば

$$\begin{aligned} S(D)=S_0+S_1D+S_2D^2+ \quad &= G(D)R^{(1)}(D)+T^{(2)}(D)+E^{(2)}(D) \\ &= G(D)\left[I^{(1)}(D)+I^{(1)}(D)\right]+G(D)E^{(1)}(D)+E^{(2)}(D) \\ &= G(D)E^{(1)}(D)+E^{(2)}(D) \qquad (10) \end{aligned}$$

で与えられる事になる。部分ブロックゼロの情報ビットに加えられた雑音ビット $e_0^{(1)}$ を訂正する為に、シンドローム系列 S_0 から S_6 迄が用いられる。このうち $e_0^{(1)}$ に関係するものは、(4)式と(10)式から、

$$\begin{aligned} S_0&=e_0^{(1)}+e_0^{(2)} \\ S_2&=e_0^{(1)}+e_2^{(1)}+e_2^{(2)} \qquad (11) \\ S_5&=e_0^{(1)}+e_3^{(1)}+e_5^{(1)}+e_5^{(2)} \end{aligned}$$

$$s_6 = e_0^{(1)} + e_1^{(1)} + e_4^{(1)} + e_6^{(1)} + e_6^{(2)}$$

が得られる。こゝでいま訂正しようとしているディジット$e_0^{(1)}$は上の4つの式にすべて含まれ、それ以外の雑音ビットはこの4つの式に高々1つ含まれるだけである。この場合この4つの式は$e_0^{(1)}$に直交しているという。$e_0^{(1)}$に直交している式の数を直交数Jという、いまの場合J=4である。従って若しもいま$e_0^{(1)}=0$とすれば、拘束長14ビット中に2つ迄のランダム誤りがある場合、$s_0+s_1+s_9+s_{12}$は高々2である。又$e_0^{(1)}=1$とすれば、拘束長14ビット中にもう1つの誤りがあって(11)式中にその影響が表れるとしても、上の和は少くとも3以上である。従って図に示すしきい値3のしきい値素子の出力は、$e_0^{(1)}=1$のときに1、$e_0^{(1)}=0$のときに0となり、$e_0^{(1)}$の誤りが訂正される。同時に図中のフィードバック結線により、$e_0^{(1)}$のシンドローム系列への影響が消去され、上と同様の議論が、$e_1^{(1)}, e_2^{(1)}$, -----の訂正に行われるのである。

§4. 符号の構成法

このような符号の構成法の要点は、出来るだけ短かい拘束長を持ち、$e_0^{(1)}$に出来るだけ多く直交する符号がよいとされるわけである。このような符号構成法の1つとして、完全単純差集合を用いる方法がある[5]。すなわち完全単純差集合

$\{d_1, d_2, \cdots\cdots, d_{g+1}\}$が与えられたとき.

$$G(D) = D^{d_1} + D^{d_2} + \cdots\cdots + D^{d_{g+1}} \qquad (12)$$

は符号の生成多項式となる。このうち符号の拘束長を出来るだけ短かくする完全単純差集合を用いればよい[5]。

然し乍らこの完全単純差集合を用いた符号は、もっとも短かい拘束長を与えるものではない。更に短かい拘束長を与えるものとしては直交可能符号[6]というものがある。直交可能符号にはたゞし誤り伝搬特性が有限でないという欠点がある。誤り伝搬特性とは、符号の誤訂正能力以上の、例えば前節の符号例では拘束長 14 ビット中に 3 ビット又はそれ以上の誤りが生じた場合、復号器が誤動作を起すが、この誤動作が第 3 図のフィードバック結線の影響で無限に続いてしまう可能性がある。完全単純差集合による符号はこの伝搬が有限であるが、直交可能符号は有限であるという保証はない.

第 2 節のはじめに、しきい値復号法はシンドローム系列又はその線型変換をしきい値素子の入力とすると記したが、第 2 節で述べた符号のように、シンドローム系列がそのまゝしきい値素子の入力となる符号を自己直交符号という。自己直交符号の拘束長を n_A とするとき、n_A の下限は、

$$n_A \geq n_0\left[\frac{(n_0-1)J(J-1)}{2}+1\right] \qquad (13)$$

で与えられる[6]。この下限と、完全単純差集合から得られる符号の拘束長のいくつかの例を第4図に示す。

§5、　しきい値復号法によるたゝみ込み符号の問題点

以下にこの符号系、復号法について、残した問題点を述べる。

(1) 第4図をみると、下限と、実際に得られた符号の拘束長になお開きがある。更に拘束長の短かい自己直交符号はないか。

(2) 完全単純差集合による符号以外に、誤り伝搬が有限で、誤訂正能力の高い、しきい値素子で復号される符号はないか。

(3) ブロック符号では、BCH符号をはじめ多くの誤訂正能力の高い符号があるが、代数的な方法で復号されるたゝみ込み符号は、しきい値素子復号法による符号しかない。この符号は装置化は簡単であるが、誤訂正能力はBCH符号等に比して劣る。更に誤訂正能力の高い、代数的に復号されるたゝみ込み符号の構成法、その復号法は存在しないであろうか。

参考文献

(1) P. Elias, "Coding for noisy channel", IRE Conv. Rec., Part 4, PP. 37～46, 1955.

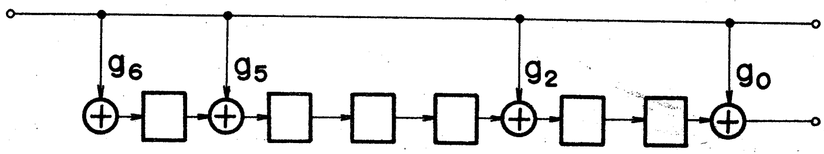
(2) J. L. Massey, "Threshold decoding", M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1963.

(3) A. J. Viterbi, "Error bound for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm", IEEE Trans. IT-13, PP. 260～269, 1967.

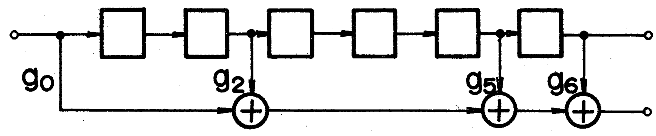
(4) J. M. Wozencraft & B. Reiffen, "Sequential decoding", M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1961.

(5) J. P. Robinson & A. J. Bernstein, "A class of binary recurrent codes with limited error propagation", IEEE Trans. IT-13, PP. 106～113, 1967.

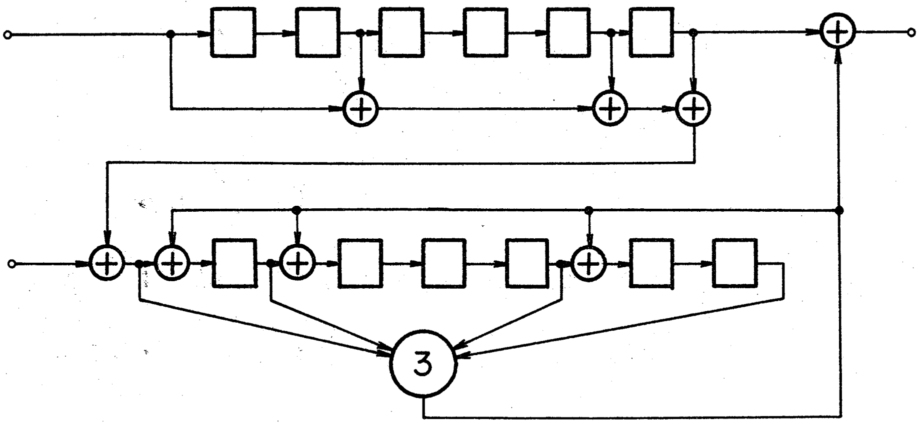
(6) R. W. Lucky et al., "Principles of data communication", Mcgraw-Hill, New york, 1968.



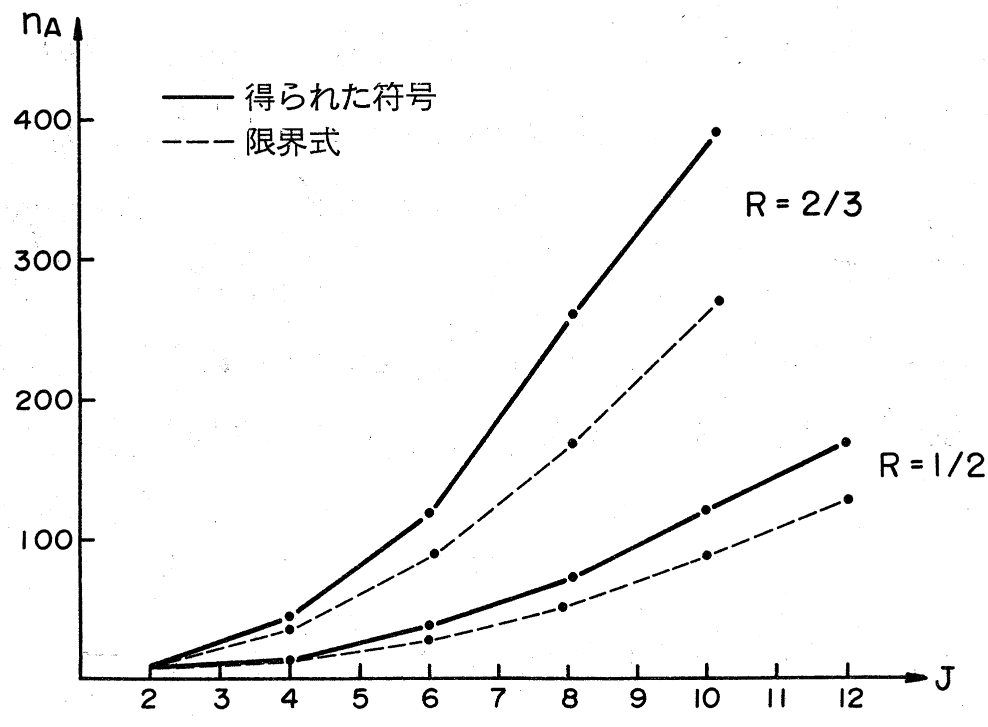
第1図　(I－R)n_A段型符号器



第2図　Rn_A段型符号器



第3図　復 号 器



第4図　拘束長と直交数